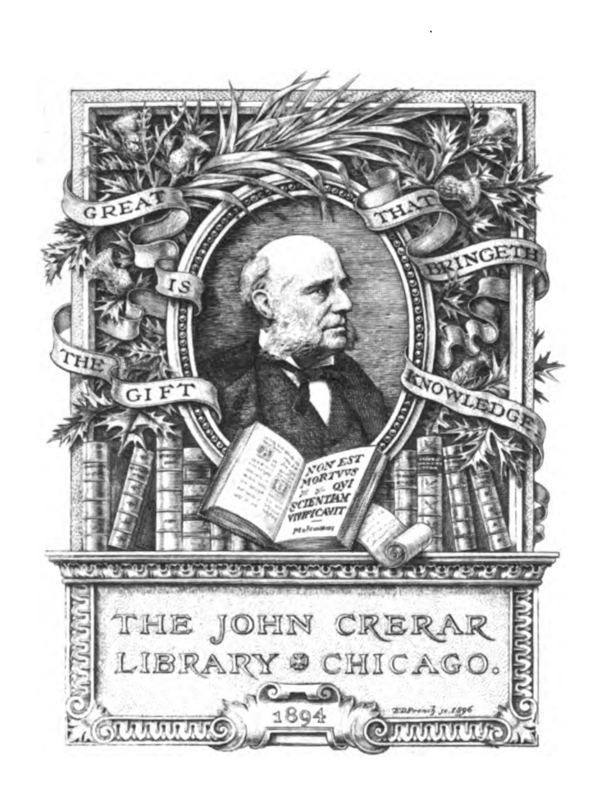





GREAT
IS
THE
GIFT
THAT
BRINGETH
KNOWLEDGE
NON EST
MORTVVS
QVI
SCIENTIAM
VIVIFICAVIT
THE JOHN CRERAR
LIBRARY CHICAGO.
1894

Historische Notizen

über

die Wahrscheinlichkeitsrechnung

von

Prof. Cantor.

Halle,
Druck und Verlag von H. W. Schmidt
1874.

In den vier Jahren, welche ich die Ehre habe der naturforschenden Gesellschaft als Mitglied anzugehören, ist mir oft die Gelegenheit zu Theil geworden, bei den hier gehaltenen Vorträgen, Forschungen kennen zu lernen, welche zu ihrer Entwickelung mehr oder weniger mathematischer Begriffe und Methoden sich bedienen.

Bei gewissen Gebieten der Naturwissenschaft ist der hülfreiche, fördernde, oft unerlässliche Antheil der Mathematik seit langen Zeiten zugestanden; die Astronomie besteht in ihrer einen Hälfte aus analytischen Theorien, welche die sich ändernden Zustände des Weltraumes zu ihrem Gegenstande haben; in der Physik macht sich einerseits überall, wo man ein durch die Beobachtung gefundenes Gesetz in einen einfachen, durchsichtigen Ausdruck bringen will, das Bedürfniss nach der algebraischen Formel geltend, andrerseits wirkt aber die Mathematik, wenn man sie in ausgedehnterem Masse auf physikalische Daten anwendet, wahrhaft schöpferisch und lässt auf Thatsachen schliessen, die theils der Beobachtung entgangen sind, theils aber auch ein so complicirtes Gewebe haben, dass die Empirie, welche sie nachträglich zu bestätigen sucht, aus eigenem Antriebe schwerlich zu ihrer Entdeckung gelangt sein würde; die Chemie ist erst von der Zeit zu einer systematischen, sich mit ungewöhnlicher Schnelligkeit weiter entwickelnden Wissenschaft geworden, als man sich die Zusammensetzung der Naturkörper durch Auffindung der sogenannten Atomgewichte an bestimmten Zahlverhältnissen vergegenwärtigen konnte. Aber auch in den übrigen Zweigen der Naturwissenschaft macht sich, wie ich höre, theils der Einfluss der mathematischen Methode, theils das Bedürfniss nach ihrer Anwendung mehr und mehr geltend; ich glaubte daraus den Schluss ziehen zu dürfen, dass, neben den in diesen Sitzungen über alle Theile der Naturforschung sich verbreitenden Vorträgen, auch einmal ein solcher nicht ohne Interesse sein würde, in welchem ein für die Naturwissenschaft fruchtbringender Theil der Mathematik, die Wahrscheinlichkeitsrechnung von historischen Gesichtspuncten aus betrachtet wird.

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung bietet der historischen Untersuchung ein nach vielen Beziehungen angenehm zu behandelndes Feld; über das Jahrhundert, in welchem ihre Entstehung allein gesucht werden kann, braucht man nicht zu streiten, denn, darüber sind alle Gelehrten einig, es ist das siebenzehnte, welches an grossen Denkern und an weittragenden Entdeckungen so reich erscheint, dass man geneigt wäre, es für das ruhmvollste von allen Jahrhunderten zu halten; die Nationen, welche einander den Besitz an geistigen Errungenschaften fortwährend streitig machen, erschweren uns die Betrachtung ebensowenig; denn sie können in diesem Falle nicht umhin, die Wiege der Wahrscheinlichkeitsrechnung in Frankreich zu erblicken, wo um die Mitte des siebenzehnten Jahrhunderts die beiden Gelehrten *Fermat* und *Pascal* im regen brieflichen Verkehr über mathematische Fragen auch auf solche Aufgaben verfielen,



welche zu ihrer Lösung die Principien der Wahrscheinlichkeitsrechnung nöthig hatten und es stellte sich zu beider Genugthuung heraus, dass sie unabhängig von einander zu denselben gelangt waren; während die gleichzeitigen Erfinder der Differential- und Integralrechnung *Isaac Newton* und *Gottfried Leibniz* sich zu einem Prioritätsstreit haben hinreissen lassen, der, von ihren Schülern und Nachfolgern in erbitterter Weise fortgeführt, noch heutiges Tages in seinen Wirkungen bemerkbar ist und dem Historiker den Blick zu trüben gesucht, — sehen wir die Begründer der Wahrscheinlichkeitsrechnung friedlich über ihren gemeinschaftlichen Fund sich freuen, um die Zukunft und um ihre Ansprüche an dieselbe wenig besorgt.

Pierre Fermat (geb. in Beaumont de Lomagne bei Tolouse 1608, gest. in Toulouse 1665) war Rath am Parlamente dieser Stadt und soll in dieser Eigenschaft sich als Jurist einen bedeutenden Namen erworben haben. In den beiden Hauptheilen der Mathematik, in der Geometrie und Arithmetik, werden ihm die wichtigsten Entdeckungen verdankt, von welchen ich nur die Tangentenmethode, welche in ihrer allgemeinen Ausbildung zur Differential- und Integralrechnung führen musste, und die nach ihm benannten Sätze in der Zahlentheorie erwähnen möchte, deren Beweise später so fruchtbringende Mühe den Mathematikern gekostet haben. —

Blaise Pascal (geb. in Clairmont-Ferrand 1623, gest. in Paris 1662) lebte ohne öffentliches Amt abwechselnd in Clermont, Rouen und Paris; seine gegen die sittenverderbende Lehre der Jesuiten gerichtete, noch bis auf den heutigen Tag wegen des vortrefflichen Stiles, der feinen Ironie und des witzigen, gewandten Vortrages vielgelesene Schrift, lettres provinciales, begründete eine neue Epoche in der Prosaliteratur; *Pascals* eigentliche Stärke darf aber wohl in seinen mathematischen und mechanischen Arbeiten angenommen werden, von denen leider eine Theorie der Kegelschnitte verloren gegangen ist; als Erinnerung an letztere sehen wir in fast allen Darstellungen dieses Gegenstandes den sogenannten *Pascal*'schen Satz den vornehmsten Platz einnehmen. —

Pascal und *Fermat* sind also die Begründer der Wahrscheinlichkeitsrechnung; ihr Zusammengehen darin tritt besonders lebhaft an der folgenden Stelle in einem Briefe *Pascals* an *Fermat* hervor (d. d. 29. Juli 1654):

„Je ne doute plus maintenant que je ne sois dans la vérité, après la rencontre admirable ou je me trouve avec vous. Je vois bien que la vérité est la même à Toulouse et à Paris".

Wir erfahren nun einen Umstand, welcher als besonderer Anlass dieser Besprechungen angesehen werden kann. Ein gewisser *Chevalier de Meré*, Mann von Ansehen und von Geist, will bei einer das Würfelspiel betreffenden Aufgabe die Autorität des Mathematikers durchaus nicht anerkennen; er hat sich eine andere Lösung in den Kopf gesetzt und in der Meinung, sie sei die richtige, klagt er die Mathematik öffentlich an, dass sie sich selbst widerspreche. Es handelte sich um Folgendes. Wenn man mit einem Würfel viermal werfen darf, so kann man mit Vortheil darauf wetten, mindestens einmal die 6 zu werfen. Spielt man mit zwei Würfeln, so findet sich, dass man nicht mit Vortheil annehmen kann, eine doppelte 6 unter vier und zwanzig Würfen zu erhalten. Nichtsdestoweniger verhalten sich beim zweiten Spiele die Zahl 24 zu der Anzahl der möglichen Fälle 36, wie 4 zu 6, d. h. wie beim ersten Spiele die entsprechenden Zahlen; und dies wollte dem *Chevalier* nicht einleuchten. *Pascal* in seiner lebhaften Weise berichtet an *Fermat* wie folgt:

„Je n'ai pas le temps de vous envoyer la démonstration d'une difficulté qui étonnait fort

Meré; car il est très bon esprit, mais il n'est pas géomètre. C'est comme vous savez un grand , et même il ne comprend pas qu'une ligne mathematique soit divisible à l'infini et croit fort bien lre qu'elle est composée de points en nombre infini, et jamais je n'ai pu l'en tirer; si vous le ppuviez ›n le rendrait parfait"; und nachdem er die Streitfrage gezeichnet, fährt er fort: „voila quel était rand scandale, qui lui faisait dire hautement que les propositions n'étaient pas constantes et que ımetique se démentait."

Der *Chevalier de Meré* darf, wie ich glaube, allen Widersachern der exacten Forschung, und es deren zu jeder Zeit und überall, als ein warnendes Beispiel hingestellt werden; denn es kann auch leicht begegnen, dass genau an jener Stelle, wo sie der Wissenschaft die tödtliche Wunde zu geben ı, ein neuer Zweig derselben, schöner, wenn möglich, und zukunftreicher als alle früheren, rasch vor Augen aufblüht, — wie die Wahrscheinlichkeitsrechnung vor den Augen des *Chevalier de Meré*. —

Sehen wir auf diese Weise *Pascal* und *Fermat* im brieflichen Verkehr das Fundament der nach-›n Wissenschaft legen und verschiedene, zum Theil complicirte Aufgaben derselben stellen und lösen, :echen sie sich doch so gut wie gar nicht über die von ihnen befolgten Principien aus, welche ge-·massen nur zwischen den Zeilen zu erkennen sind und es muss daher die erste systematische Zusammenstellung und Begründung derselben besonders hoch geachtet werden. Bereits nach 3 Jahren unternahm es *Hugens* diese Lücke auszufüllen. Als Anhang zu *Schootens* exercitationum mathematicarum libri quinque erschien sein tractatus de ratiociniis in ludo aleae. Hier werden die Grundsätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung, freilich noch nicht in der einfachsten Weise, entwickelt; der Verfasser wendet sie hauptsächlich auf die mit Würfeln angestellten Spiele an; er bezieht sich auf die Arbeiten seiner Vorgänger, musste jedoch fast ganz von vorn anfangen, weil sich jene über ihre Methoden nicht ausgesprochen hatten. In der Einleitung zum *Hugens*'schen Werke heisst es: „Sciendum vero, quod jam pridem inter praestantissimos tota Gallia geometras calculus hic agitatus fuerit, ne quis indebitam mihi primae inventionis gloriam hac in re tribuat. Caeterum illi, dificillimis quibusque quaestionibus se invicem exercere soliti, methodum suam quisque occultam retinuere, adeo ut a primis elementis universam hanc materiam evolvere mihi necesse fuerit."

Zu den frühesten Documenten der Wahrscheinlichkeitsrechnung gehört auch ein Brief des Amsterdamer Philosophen *Benedictus de Spinoza* (geb. in Amsterdam 1632, gest. im Haag 1677). Während seines einsamen Landlebens in Voorburg löst er eine ihm von einem Freunde gestellte arithmetische Aufgabe und theilt demselben seine Lösung mit. Der Brief (in der *Bruder*schen Ausgabe von *Sp.*'s Werken der 43.) ist datirt den 1. October 1666; sehen wir uns seinen Inhalt genauer an, so finden wir darin gewisse Grundsätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung mit der diesem Philosophen eigenen, fast unerreichbaren Strenge der Begriffsconstruction kurz enthalten. Ich muss es den Kennern überlassen, zu entscheiden, ob *Spinoza* in den Briefwechsel zwischen *Pascal* und *Fermat* eingeweiht gewesen, ob er den *Hugens*-schen Tractat gekannt hat, oder ob er unabhängig von allen Vorgängern zu seinen Resultaten gelangt ist. —

Wenn man das Wesen der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf eine einfache und zugleich allgemeine Weise bezeichnen will, so muss man es in dem Grundsatze erblicken, dass die mathematische Wahrscheinlichkeit für den Eintritt eines erwarteten Ereignisses durch einen ächten Bruch gemessen wird, dessen Nenner die Anzahl aller denkbaren, sowohl günstigen, wie ungünstigen Fälle, welche eintreten können,

dessen Zähler aber nur die Anzahl der dem Ereignisse günstigen Fälle angiebt, vorausgesetzt, dass ein jeder von den sämmtlichen, in Betracht zu ziehenden Fällen, mit Rücksicht auf unseren Wissenszustand, gleich möglich ist. — Man ist also bei der Bestimmung der Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses auf die Berechnung vom Zähler und Nenner derselben angewiesen, was je nach der Natur der betreffenden Aufgabe verschiedene Hülfsmittel erfordert.

Jacob Bernouilli (geb. in Basel 1654, gest. in Basel 1705) hat in seinem Werke Ars conjectandi, welches nach seinem Tode von seinem Sohne *Nikolaus* 1713 herausgegeben worden ist, die Berechnung der Wahrscheinlichkeiten für die bei den Hazardspielen denkbaren Aufgaben allgemein durchzuführen gesucht; er bemerkte, dass sie auf die Aufgabe zurückkommt, aus gegebenen Elementen nach einem vorgeschriebenen Modus alle möglichen Zusammenstellungen zu bilden; von den verschiedenen Modis, welche dabei erdacht werden können, wurden die häufigst vorkommenden ins Auge gefasst, die Permutationen, Combinationen und Variationen genannt und in dem zweiten Theile seines Buches ausführlich behandelt werden; in den ersten Theil desselben nahm er den *Hugens*schen Tractat auf, dem er eigene Bemerkungen hinzufügte; der dritte Theil ist den Anwendungen auf das Hazardspiel gewidmet; der vierte Theil des unvollendet gebliebenen Werkes kann als der bedeutendste von allen betrachtet werden; wir sehen *Bernouilli* hier ganz neue Bahnen betreten, welche, für alle späteren Bearbeitungen massgebend, der jungen Wissenschaft eine unvorhergesehene Tragweite und das unbestrittene Recht verschafften, in allen Gebieten des Lebens ein gewichtiges Wort mitreden zu dürfen.

Die Ueberschrift ist: „Pars quarta, tradens usum et applicationem praecedentis doctrinae in civilibus, moralibus et oeconomicis." Die Kapitel dieses Theiles sind folgendermassen betitelt:

„Cap. I. Praeliminaria quaedam de certitudine, probabilitate, necessitate et contingentia rerum."

„Cap. II. De scientia et conjectura. De arte conjectandi. De argumentis conjecturarum. Axiomata quaedam generalia huc pertinentia."

„Cap. III. De variis argumentorum generibus, et quomodo eorum pondera aestimentur ad supputandas rerum probabilitates."

„Cap. IV. De duplici modo investigandi numeros casuum. Quid sentiendum de illo, qui instituitur per experimenta, Problema singulare eam in rem propositum."

Wenn wir in der Gegenwart alle weisen Staatsverwaltungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung als eines sicheren, zuverlässigen Instrumentes sich bedienen sehen, wenn wir bemerken, dass die modernen volkswirthschaftlichen Theorien durch sie umgestaltet und gefördert werden, so können wir nicht ohne eine gewisse Genugthuung auf das Buch des Baseler Universitätslehrers blicken, wo in den hier bezeichneten Capiteln die praktische Seite der Wahrscheinlichkeitsrechuung zum ersten Male wissenschaftlich vorbereitet wird.

Nur an den mathematischen Theil dieser Arbeit möchte ich hier wenige Bemerkungen knüpfen; derselbe gipfelt in dem von *Bernouilli* gefundenen Satze, welcher das Verhältniss der sogenannten Wahrscheinlichkeit a priori zu der Wahrscheinlichkeit a posteriori bestimmt. Viele Ereignisse haben ein so zusammengesetztes Gefüge, dass es nicht möglich ist, ihre Wahrscheinlichkeit direct, d. h. a priori anzugeben; *Bernouilli* lehrt uns, wie sie a posteriori, d. h. durch Beobachtungen gefunden werden kann. Dieser Satz wird uns leicht verständlich durch ein Beispiel. Man denke sich eine Urne, welche schwarze und weisse Kugeln enthält. Wenn man weiss, dass die Anzahl der schwarzen Kugeln p ist, die Anzahl



sämmtlicher Kugeln n, so ist die Wahrscheinlichkeit w des Ziehens einer schwarzen Kugel $w = \frac{p}{n}$, gleich der Anzahl der günstigen Fälle, dividirt durch die Anzahl aller Fälle.

Denken wir uns aber dieses Verhältniss der schwarzen zu allen in der Urne enthaltenen Kugeln unbekannt, so ziehen wir blind eine Anzahl von Malen, die ich n' nennen will, je eine Kugel, die jedesmal wieder in die Urne zurückgeworfen wird; hierbei möge p' die Anzahl angeben, wie oft eine schwarze Kugel gezogen worden ist; dann giebt uns der *Bernouilli*sche Satz eine bestimmte Beziehung zwischen der gesuchten Wahrscheinlichkeit $w = \frac{p}{n}$ und dem auf diese Weise durch Versuche auffindbaren Bruche $\frac{p'}{n'}$ an; der Satz lautet:

Man kann die Wahrscheinlichkeit, dass der Bruch $\frac{p'}{n'}$ von der Wahrscheinlichkeit w um weniger als eine beliebig vorgegebene Grösse abweicht, der Gewissheit beliebig nahe bringen, wenn nur die Anzahl n' der Versuche hinreichend vergrössert wird. —

Hieraus folgt nun, dass man für die Wahrscheinlichkeit w eines Ereignisses annäherungsweise mit grosser Glaubwürdigkeit den aus der Beobachtung sich ergebenden Bruch $\frac{p'}{n'}$ substituiren kann, wenn nur n' gross genug angenommen wird. —

Bernouilli legte diesem Resultate mit Recht einen um so grösseren Werth bei, als er zu dessen Begründung erhebliche Schwierigkeiten besiegen musste. Sein Beweis enthält zwar einige Beschränkungen, kann aber, wie ich gefunden habe, ohne das dabei befolgte Princip zu ändern, vollkommen strenge gemacht werden; er hat vor dem später durch *Laplace* gelieferten den grossen Vorzug, dass in ihm nur die elementarsten Mittel zur Anwendung kommen. Es wird erzählt, dass *Bernouilli*, obgleich er von der Bedeutung seiner Arbeit durchdrungen war, dieselbe 20 Jahre lang unter seinen Papieren habe liegen lassen. —

Bereits im Jahre 1708 erschien der Essai d'analyse sur les jeux de hazard von *Pierre Rémond de Montmort* (geb. in Paris 1678, gest. in Paris 1719), Canonicus an Notredame und Mitglied der Academie zu Paris. Obgleich der Herausgabe nach älter als die ars conjectandi, welche erst 1713 erschien, ist dieses Werk doch nicht unabhängig von dem *Bernouilli*schen. Der Verfasser sagt, dass er die Anregung dazu dem verdanke, was er berichtweise über die *Bernouilli*schen Forschungen erfahren habe und wir können uns über den Inhalt der *Montmort*schen Arbeit dahin aussprechen, dass sie im Wesentlichen mit den drei ersten Theilen der ars conjectandi parallel geht.

Von *Moivre* erschien 1711 (Phil. Trans.) eine Abhandlung de mensura sortis, welcher im Jahre 1718 die Schrift folgte: Doctrine of chances. *Abraham de Moivre* (geb. in Vitry in der Champagne 1667, gest. in London 1754) verliess nach Aufhebung des Edictes von Nantes als Protestant sein Vaterland und lebte als Privatlehrer der Mathematik in London, wo er in die Royal Society aufgenommen wurde. —

In den *Moivre*schen Arbeiten sehen wir mehr als in allen früheren über die Wahrscheinlichkeitsrechnung das Wesentliche von dem Unwesentlichen geschieden; dem *Hugens*schen Tractate gegenüber erscheinen seine Methoden als die mehr genuinen und im Vergleiche zu der ars conjectandi macht sich eine zum Theil gewandtere Analyse geltend.

Im Jahre 1740 erschien in London von ***Thom. Simpson*** treatise on the nature and laws of chance; es ist derselbe *Simpson*, welchem wir werthvolle Bereicherungen in der Geometrie verdanken; die sogenannten *Simpson*schen Regeln haben die Lehre von der näherungsweisen Quadratur angebahnt. —

Indem wir der Entwickelung der Wahrscheinlichkeitsrechnung weiter folgen, treten wir in die Epoche der französischen Revolution; die Gedankenrichtung, welche dieses Ereigniss vorbereitete und durch eine schonungslose, auf den Umsturz des Bestehenden hinzielende Critik der Zustände des staatlichen und des Familienlebens bezeichnet ist, konnte ein Instrument nicht ungenutzt lassen, welches, wie kein anderes, die Befähigung giebt, die verschiedensten Culturelemente allgemeinen Gesichtspuncten unterzuordnen. Zu den Lieblingsideen dieser Aufklärungszeit gehörte dann auch, dass die Wahrscheinlichkeitsrechnung einer der wichtigsten Gegenstände des öffentlichen Unterrichts sei, denn sie sei die Rechnung des gesunden Menschenverstandes, durch deren Belehrungen allein der falsche Einfluss von Hoffnung, Furcht und allen Gemüthsbewegungen auf unser Urtheil vernichtet und somit Vorurtheil und Aberglaube aus dem Urtheil im bürgerlichen Leben verdrängt werden könne.

Vornehmlich begegnet uns hier der zu den Girondisten gezählte Marquis ***de Condorcet*** (geb. in Ribemont 1743, gest. in dem Gefängniss zu Bourg la Reine 1794), Mitglied und später Secretär der Pariser Academie. Sein Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des décisions rendues à la pluralité des voix. Paris 1784 zeichnet sich durch seinen philosophischen Gehalt sowohl, wie auch durch die Neuheit der darin behandelten Probleme aus. —

Durch ***Pierre-Simon Comte de Laplace*** (Beaumont en Auge 1749 — Paris 1827) erhält die Wahrscheinlichkeitsrechnung eine ausserordentliche Vollendung in ihren analytischen Bestandtheilen und in ihren Anwendungen auf das Leben.

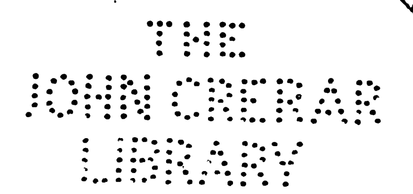
Laplace war erst Lehrer der Mathematik an der Militärschule seiner Vaterstadt, dann in Paris Examinator beim k. Artilleriecorps und später Professor der Mathematik an der école normale, daneben Mitglied der Academie und des bureau des longitudes, auch unter der Consularregierung kurze Zeit Minister des Innern. Er hat zwei Werke über die Wahrscheinlichkeitsrechnung hinterlassen; das grössere, die Théorie analytique des probabilités (Paris 1812) widmete er, wie schon früher seinen Traité de mécanique c'eleste dem ersten Napoleon; in der Widmung heisst es:

„Ce calcul délicat s'étend aux questions les plus importantes de la vie, qui ne sont, en effet, pour la plupart, que des problèmes de probabilité. Il doit, sous ce rapport, interesser votre Majesté dont le génie sait si bien apprécier et si dignement encourager tout ce qui peut contribuer au progrès des lumières, et de la prosperité publique."

Das zweite Werk ist sein: Essai philosophique sur les probabilités Paris 1814; hier sehen wir, dass ***Laplace*** nicht nur Meister in der Behandlung der schwierigsten analytischen Fragen ist, sondern auch, dass es ihm, wie keinem andern gegeben war, dieselben Gegenstände gemeinfasslich in der vollendetsten Form zu behandeln. —

Deutschland erhält einen entschiedenen Antheil an der Ausbildung der Wahrscheinlichkeitsrechnung erst durch ***Gauss***, welcher besonders eine Seite ihrer Anwendungen untersucht und begründet hat.

Stets, wenn in der Natur Grössenmessungen vorgenommen werden, sind die Resultate derselben mit Fehlern behaftet, die theils vom Zufalle herbeigeführt, theils von störenden äusseren Umständen ab-



hängig sind, theils aber auch in den Täuschungen ihre Ursache haben, welchen wir selbst, unserer Natur nach, beim Beobachten unterworfen sind.

Um nun diese Fehler, welche nach der einen oder andern Seite hin möglich sind, zu verkleinern, ist man schon frühe auf den Gedanken gekommen, eine und dieselbe Messung oder, allgemeiner gesprochen, ein und dasselbe System von Messungen öfter, als die Zahl der zu bestimmenden Grössen fordert und unter den verschiedensten Umständen vorzunehmen; die Resultate, welche man auf diese Weise erhält, sind nun zwar alle von dem richtigen aus den angeführten Gründen verschieden, aber es lässt sich annehmen, dass man durch eine verständige Combination derselben ein solches aus ihnen herleiten kann, welchem man eine grössere Glaubwürdigkeit beilegen muss, als jeder der ursprünglichen Messungen für sich. —

In der Astronomie, wo das hier berührte Problem besonders dringend auftrat, hat bereits *de Laplace* eine Methode entworfen, welche zu dem angegebenen Ziele führt.

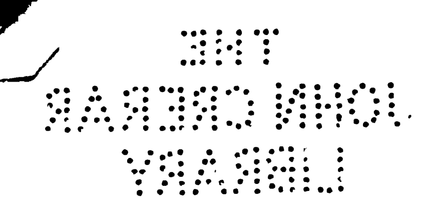
Gauss wandte zum ersten Male auf diese Aufgabe die Principien der Wahrscheinlichkeitsrechnung an und fand nicht nur eine einfachere Lösung derselben, sondern auch diejenige, welcher von allen möglichen die grösste Glaubwürdigkeit zukömmt. Die unter dem Namen: Methode der kleinsten Quadrate, von ihm begründete Näherungsmethode erschien zuerst als ein Bestandtheil seines grossen Werkes: Theoria motus corporum coelestium 1809, welches hauptsächlich der Bahnbestimmung der Planeten aus drei Bahnelementen gewidmet ist.

In den Jahren 1821, 1823 und 1826 widmete er dieser Theorie drei academische Abhandlungen: Theoria combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae. Pars. I. und II. und Supplementum theoriae combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae.

Es liegt in der Aufgabe, welche ich mir gestellt, nur dasjenige kurz zu berühren, was in der Entwickelung der Wahrscheinlichkeitsrechnung als massgebend hervortritt; es sind aus diesem Grunde viele verdienstvolle Abhandlungen und Compendien von dieser Besprechung ausgeschlossen, die zur Vertiefung sowohl, wie zur Verbreitung der Wissenschaft Ausgezeichnetes beigetragen haben. — Ich darf jedoch ein Moment nicht unerwähnt lassen, welches wesentlich zu unserer Wissenschaft gehört, ich meine ihre philosophische Begründung — die Franzosen nennen es die Metaphysik der Wahrscheinlichkeitsrechnung. —

Jede Wissenschaft, welche sich, wie die unsrige, auf Begriffe und Grundsätze stützt, die nicht blos spontan gebildet und mathematisch verwerthet werden, sondern auch eine gewisse reale Gültigkeit in Anspruch nehmen, so dass die Resultate der Rechnung eine Anwendung auf die Wirklichkeit erhalten sollen, jede derartige Wissenschaft erfordert nach Inhalt und Umfang eine philosophische Kritik. Die Mathematiker beschränken sich freilich in den meisten Fällen bei der Herleitung der Grundbegriffe, wie mathematische Wahrscheinlichkeit, möglicher Fall, Gewissheit und dergl., auf synthetische Begriffserklärungen, die Bedingungen ihrer Anwendbarkeit werden oft als etwas Selbstverständliches nicht weiter erörtert; um die fundamentalen Sätze, wie z. B. den für die Wahrscheinlichkeit zusammengesetzter Ereignisse zu beweisen, wird ein concreter Fall, wie etwa der einer Urne mit schwarzen und weissen Kugeln behandelt; und es wird manchmal stillschweigend die Richtigkeit derartiger Sätze auf Fälle übertragen, in welchen ihre Gültigkeit mindestens zweifelhaft ist. —

Nirgends ist die Gelegenheit in dem Grade vorhanden, wie hier, die Kunst der Analysis in glän-



zender Weise zu entfalten; aber auch nirgends tritt der Fall häufiger auf, dass die mit Scharfsinn durchgeführte Rechnung von gar keinem Werthe ist, weil sie sich auf unrichtige Voraussetzungen stützt. —

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung hat also stets und besonders, wenn ihr ein neues Feld der Anwendung gegeben wird, eine Erörterung nöthig, worin die Gültigkeit ihrer Berechnungen genau festgestellt wird. —

Diese Seite der Wissenschaft, nämlich ihre philosophische, finden wir denn auch von allen ihren Vertretern gewürdigt und gepflegt. *Bernouilli* hat, wie wir sahen, das vierte Buch seiner ars conjectandi hauptsächlich der Kritik gewidmet; *Condorcet* geht in seinem Werke von philosophischen Gesichtspuncten aus; *Laplace* schrieb seinen Essai philosophique sur les probabilités; in *Lacroix's* „Traité élémentaire du calcul des probabilités" finden wir die philosophische Seite durchgehends vertreten. Hierbei bietet sich eine Bemerkung dar: die englischen und französischen Mathematiker gehen bei ihren philosophischen Betrachtungen zumeist von den Grundsätzen des *Hume*schen Scepticismus und des *Locke*schen Sensualismus aus; darnach finden wir bei ihnen auch die Begründung der Wahrscheinlichkeitsrechnung von diesen Gesichtspunkten aus; seitdem aber in Deutschland *Kant* neue, die Erkenntniss betreffende Lehren angebahnt hat, wird auch die Wahrscheinlichkeitsrechnung im Kantischen Sinne kritisch untersucht und es sei mir in dieser Beziehung gestattet, nur an die Schrift von *Jac. Fr. Fries* zu erinnern, betitelt: Versuch einer Kritik der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Obgleich ich nun mit meinem Versuche, aus den mir bekannt gewordenen Schriften und Ueberlieferungen ein flüchtiges Bild der Wissenschaft zu entwerfen, eigentlich zu Ende bin, kann ich der Versuchung doch nicht widerstehen, die Nützlichkeit und den Werth der Wahrscheinlichkeitsrechnung hervorzuheben, indem ich die Schlussworte aus dem essai philosophique von *Laplace* in Uebersetzung hier anführe:

„Man sieht", sagt er, „dass die Wahrscheinlichkeitsrechnung im Grunde nichts anderes ist, als der in Rechnung gebrachte gesunde Menschenverstand; sie lehrt dasjenige mit Genauigkeit bestimmen, was ein richtiger Verstand durch eine Art von Instinct fühlt, ohne sich immer Rechenschaft davon geben zu können. Sie lässt keine Willkühr bei der Wahl von Ansichten zu, da sie zeigt, welche von ihnen die glaubwürdigste sei. So bildet sie einen Ersatz für die natürliche Unwissenheit und Schwäche des menschlichen Geistes. Betrachtet man die analytischen Methoden, welche erst durch diese Theorie entstanden sind, die Wahrheit der Grundsätze, auf denen sie beruht, die feine und genaue Logik, welche ihr Gebrauch bei der Auflösung von Aufgaben erfordert, den Nutzen der auf sie gegründeten öffentlichen Anstalten und die Ausdehnung, welche sie auf die wichtigsten Aufgaben der Naturwissenschaft und der moralischen Wissenschaften erhalten hat und noch mehr erhalten kann; und berücksichtigt man zugleich, dass sie selbst bei Gegenständen, die der Rechnung nicht unterworfen werden können, die richtigsten Ansichten verschafft, welche die Urtheile darüber leiten können und dass sie vor verwirrenden Täuschungen sich hüten lehrt, so wird man einsehen, dass keine Wissenschaft des Nachdenkens würdiger ist und keine mit mehr Nutzen in das System des öffentlichen Unterrichts aufgenommen werden kann." —

Im Verlage von **H. W. Schmidt** in Halle sind ferner erschienen:

Cantor, M., Mathematische Beiträge zum Kulturleben der Völker. M. 4 Taf. 1863. 3 Thlr.

Grunert's Archiv spricht sich hierüber in einer Kritik u. a. wie folgt aus:

„Und wir glauben in der That, dass kein Leser das vorliegende Buch, in welchem der Herr Verfasser eine grosse historische Gelehrsamkeit und Belesenheit entwickelt, ohne vielfache Belehrung und ohne den Gewinn mancher neuen Aufschlüsse aus der Hand legen wird, weshalb wir also recht sehr auf dasselbe aufmerksam machen."

Inhalt: Cap. I. Die Egypter. II. Die Babylonier. III. Die Chinesen. IV. Die Inder. V.—VII. Leben, Geometrie und Arithmetik des Pythagoras. VIII. Die Zahlzeichen der Griechen. IX. X. Das Rechenbrett. XI. Die Zahlzeichen der Römer. XII. Römische Mathematiker. XIII. Die Werke des Boethius. XIV. XV. Die Handschrift E. Multiplication. Division, Minutien. XVI. Pythagorische Zeichen. XVII. Die Zahlzeichen der Araber. XVIII. Arabische Rechenkunst. XIX. Isidor, Beda, Alcuin. XX. Odo von Clüny. XXI. XXII. Gerbert's Leben und Mathematik. XXIII. Abacisten und Algorithmiker. XXIV Leonardo von Pisa.

Die „Europa" sagt am Schluss einer grösseren Kritik:

„Dieses Werk, wozu der Stoff mit grossem Fleiss gesammelt und mit gediegener Kenntniss und klarer Beurtheilung verarbeitet ist, wird nicht blos Mathematikern, sondern für Jeden, der sich mit der Kulturgeschichte der Völker beschäftigt, eine interessante Lectüre sein."

Als Prämiengeschenk und zur Einverleibung in Bibliotheken von Gymnasien, Realschulen etc. wird dies Werk sehr geeignet gefunden und dazu oft verwandt.

Libri, Guill., **histoire des sciences mathématiques** en Italie, depuis la renaissance des lettres jusqu'à la fin du XVII[e] siècle. 4 vls. deuxième édition. 1865. 5 Thlr. 20 Sgr.

Dieses hochgeschätzte Werk kann in keiner Bibliothek fehlen.

Gerhardt, C. I., die **Geschichte** der Entdeckung d. höheren Analysis. M. 2 Schrifttaf. 1855. 1 Thlr. 10 Sgr.

— — Die Entdeckung d. Differentialrechnung durch G. W. v. Leibniz mit Benutzung d. Leibniz'schen Manuscr. M. Kpf. 4. 1848. 20 Sgr.

Das Rechenbuch des Maximus Planudes (*ΜΑΞΙΜΟΥ ΜΟΝΑΧΟΥ ΤΟΥ ΠΛΑΝΟΥΔΗ ΨΗΦΟΦΟΡΙΑ ΚΑΤ' ΙΝΔΟΥΣ Η ΛΕΓΟΜΕΝΗ ΜΕΓΑΛΗ*). Nach den Handschriften der Kais. Bibliothek zu Paris hg. v. **C. I. Gerhardt.** 1865. 24 Sgr.

Das Rechenbuch des Mönchs Planudes, der crc 1350 lebte, ist für die Geschichte der Mathematik von grossem Interesse. Der Herausgeber giebt ausser einem vollständigen Abdruck der griechischen Handschrift eine historische Einleitung und erklärenden Commentar dazu.

Leibnizen's mathemat. Schriften aus den Handschriften hg. v. **C. I. Gerhardt.** III. bis VII. Bd. 1855 — 63. 23 Thlr. 15 Sgr.

Pappus von Alexandrien Sammlung. Siebentes und achtes Buch. Griech. und deutsch hersgg. von C. I. **Gerhardt.** Mit vielen Holzschnitten. 1871. 2⅓ Thlr.

Briot und **Bouquet's** Theorie der **doppelt-periodischen** und insbesondere der **elliptischen Functionen**, mit Benutzung dahin einschlagender Arbeiten deutscher Mathematiker dargestellt von H. Fischer. Mit 37 Holzschnitten. 1862. 2 Rthlr. 20 Sgr.

Das Werk von Briot und Bouquet hat in der Mathematik einen klassischen Ruhm erlangt. Diese deutsche Bearbeitung wird wegen Deutlichkeit und weiterer Benutzung der Arbeiten der deutschen Mathematik dem Original vorgezogen.

Puiseux's, V., Untersuchungen über die **algebraischen Functionen**, dargestellt von H. Fischer. Mit 29 Abbild. 1861. 1 Thlr.

Bildet zugleich die Vorstudien zu Briot und Bouquet's Theorie der doppelt-periodischen Functionen.

Schwarz, Dr. **Herm.**, Elemente der **Zahlentheorie**. 29 Bg. 1855. gr. 8. 2 Thlr. 20 Sgr.

Inhalt: Geschichtliches. Von der Congruenz der Zahlen. Von den Resten der Potenzen. Theorie der quadratischen Reste und Nichtreste im Besonderen. Von der Auflösung der allgemeinen Congruenz zweiten Grades mit einer Unbekannten. Theorie der quadratischen Formen und Auflösung der allgemeinen Gleichung $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = M$, Auflösung der allgemeinen Gleichung zweiten Grades zwischen den Unbestimmten X und Y etc.

Dieses Lehrbuch schliesst sich soviel als möglich den „disquisitiones arithmeticae ed. Gauss" an und enthält zugleich die Forschungen dieser berühmten Schrift.



